ÉCOLE DE L'AIR
ÉPREUVE À OPTION
1992
M-P

N'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

•••••••••••

Première partie : Calcul approché de la constante d'Euler

1. (a) On a $u_n - v_n = \dfrac{1}{n}$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$.

D'autre part $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \leq 0$. Ce qui prouve que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Enfin $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \geqslant 0$. Ce qui prouve maintenant que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

Ces deux suites sont donc adjacentes de limite γ. D'où l'existence de γ.

(b) On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geqslant 2 \quad v_n \leq \gamma \leq u_n$ puis $|u_n - v_n| \leq \dfrac{1}{10}$. Donc pour avoir une valeur approchée à 10^{-1} près, il suffit $|u_n - v_n| = \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{10}$, il suffit donc d'avoir $n \geqslant 10$. v_{10}, u_{10} constitue donc un encadrement de 2 valeurs approchées de γ à $\dfrac{1}{10}$ près.

$$\gamma \simeq 0,5.$$

2. (a) Sur l'intervalle $[k, k+1]$, la fonction g est de la forme : $g(t) = at + b$ avec :

$$\begin{cases} g(k) = ak + b = \dfrac{1}{k} \\ g(k+1) = a(k+1) + b = \dfrac{1}{k+1} \end{cases}.$$

D'où $a = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k}$ et $b = \dfrac{1}{k+1} + \dfrac{1}{k}$.

De même, sur l'intervalle $[k, k+1]$, la fonction h est de la forme :

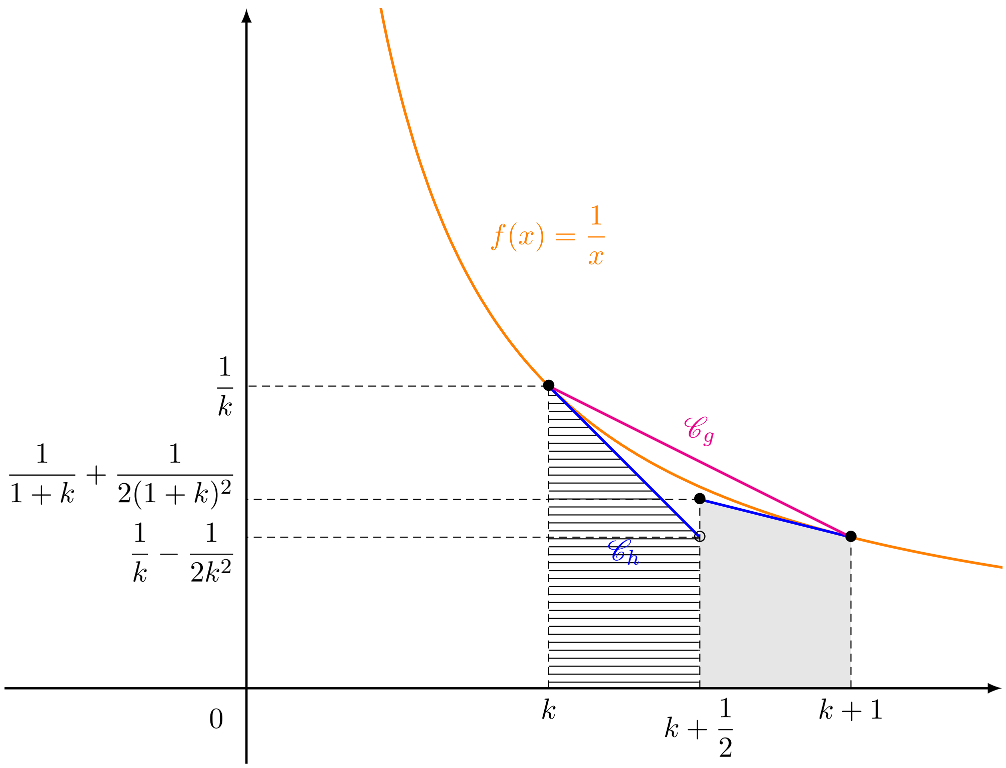
$$\begin{cases} h(t) = a_1 t + b_1 & \text{si } t \in \left[k, k + \dfrac{1}{2}\right[\\ h(t) = a_2 t + b_2 & \text{si } t \in \left[k + \dfrac{1}{2}, k+1\right] \end{cases}$$

avec les conditions :

$$\begin{cases} a_1 = h'(k) = f'(k) = -\dfrac{1}{k^2} \\ a_2 = h'(k+1) = f'(k+1) = -\dfrac{1}{(k+1)^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} h(k) = a_1 k + b_1 = \dfrac{1}{k} \\ h(k+1) = a_2(k+1) + b_2 = \dfrac{1}{k+1} \end{cases}.$$

Donc

$$\begin{cases} b_1 = \dfrac{2}{k} \\ b_2 = \dfrac{2}{k+1} \end{cases}.$$



f est convexe car de dérivée seconde positive. g a pour courbe représentative la corde de la courbe représentative de f et h a pour courbe représentative deux tangentes à celle de f. La corde est au dessus d'une courbe convexe et les tangentes en dessous. D'où les inégalités :

$$\forall t \in [k, k+1],\ h(t) \leq f(t) \leq g(t).$$

On a :

$$\begin{aligned}
\int_k^{k+1} h(t)\mathrm{d}t &= \int_k^{k+\frac{1}{2}} (a_1 t + b_1)\mathrm{d}t + \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} (a_2 t + b_2)\mathrm{d}t \\
&= \frac{a_1}{2}\left[\left(k+\frac{1}{2}\right)^2 - k^2\right] + \frac{b_1}{2} + \frac{a_2}{2}\left[(k+1)^2 - \left(k+\frac{1}{2}\right)^2\right] + \frac{b_2}{2} \\
&= -\frac{1}{2k^2}\left(k+\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{k} - \frac{1}{2(k+1)^2}\left(k+\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{k+1} \\
&= \frac{1}{2k} - \frac{1}{8}k^2 + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{8(k+1)^2}.
\end{aligned}$$

et

$$\int_k^{k+1} g(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right).$$

En intégrant sur $[k, k+1]$, on obtient, par croissance de l'intégrale :

$$\int_k^{k+1} h\left(t\right)\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} f\left(t\right)\mathrm{d}t \leq \int_k^{k+1} g\left(t\right)\mathrm{d}t$$

ou encore

$$\frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{8(k+1)^2} - \frac{1}{8k^2} \leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leq \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)}.$$

On retranche $\dfrac{1}{k+1}$ de chacun des membres de l'inégalité précédente,on obtient :

$$\frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}+\frac{1}{8(k+1)^2}-\frac{1}{8k^2}\leq \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\frac{1}{k+1}\leq \frac{1}{2k}-\frac{1}{2(k+1)}.$$

On somme de $k=n+1$ à $n+p$, puis en fait tendre p vers l'infini pour obtenir :

$$\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}\leq u_n-\gamma\leq \frac{1}{2n}.$$

(b) L'inégalité précédente s'écrit encore :

$$-\frac{1}{8n^2}\leq \left(u_n-\frac{1}{2n}\right)-\gamma\leq 0.$$

Quand $\dfrac{1}{8n^2}\leq 10^{-3}$, c'est à dire dès que $n^2\geqslant 125$ ou encore $n\geqslant 12$, on a $u_n-\dfrac{1}{2n}$ qui est une valeur approchée de γ à 10^{-3} près. On choisit donc $u_{12}-\dfrac{1}{24}$, ce qui donne :

$$\gamma\backsimeq 0,576$$

(c) Tout d'abord, on a le développement limité :

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+\frac{1}{3k^3}-\frac{1}{4k^4}+\frac{1}{5k^5}+o\left(\frac{1}{k^5}\right).$$

Ensuite, on a aussi :

$$\frac{1}{k+1}=\frac{1}{k}\frac{1}{1+\frac{1}{k}}=\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{k}+\frac{1}{kk^2}-\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k^4}\right)+o\left(\frac{1}{k^4}\right)=\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}+\frac{1}{k^3}-\frac{1}{k^4}+\frac{1}{k^5}+o\left(\frac{1}{k^5}\right)$$

ce qui permet d'écrire :

$$\left(\frac{1}{k+1}\right)^2=\frac{1}{k^2}-\frac{2}{k^3}+\frac{3}{k^4}-\frac{4}{k^5}+o\left(\frac{1}{k^5}\right)$$

et

$$\left(\frac{1}{k+1}\right)^4=\frac{1}{k^4}-\frac{4}{k^5}+o\left(\frac{1}{k^5}\right)$$

Donc

$$\frac{1}{k^4}-\left(\frac{1}{k+1}\right)^4=\frac{4}{k^5}+o\left(\frac{1}{k^5}\right).$$

D'après ce qui précède, on a évidemment $a=\dfrac{1}{2}$ et alors :

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=-\frac{1}{6k^3}+\frac{1}{4k^4}-\frac{3}{10k^5}+o\left(\frac{1}{k^5}\right)$$

et puisque

$$\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{k^2}=-\frac{2}{k^3}+\frac{3}{k^4}-\frac{4}{k^5}+o\left(\frac{1}{k^5}\right)$$

on doit avoir $b=-\dfrac{1}{12}$, ce qui donne :

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)=\frac{1}{30k^5}+o\left(\frac{1}{k^5}\right)=\frac{1}{120}\left(\frac{1}{k^4}-\frac{1}{(k+1)^4}\right)+o\left(\frac{1}{k^5}\right)$$

Ainsi donc, avec $a=\dfrac{1}{2}$, $b=-\dfrac{1}{12}$ et $c=\dfrac{1}{120}$, on obtient bien :

$$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{12}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right)\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{120}\left(\frac{1}{k^4}-\frac{1}{(k+1)^4}\right).$$

(d) On sait que $u_n-\gamma=\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty}\left[\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)-\frac{1}{k+1}\right]$, donc par somme et télescopage, on obtient :

$$u_n-\gamma-\frac{1}{2n}+\frac{1}{12n^2}\underset{k\to+\infty}{\sim}\frac{1}{120n^4}.$$

3. (a) $\ker(\Phi)$ est t clairement constitué des polynômes constants $\mathbb{Q}_0[X]$. En effet, $Q\in\ker(\Phi)$ si et seulement si, $Q(X+1)=Q(X)$, Q est 1-périodique , Q est donc constant.
Comme $\deg(\Phi(P))$ $=\deg(P)-1$ dès que P n'est pas constant, On en déduit donc que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, l'image de la restriction Φ_n de Φ à $\mathbb{Q}_n[X]$ est incluse dans $\mathbb{Q}_{n-1}[X]$. Or, d'après le théorème du rang :

$$\dim(\mathbb{Q}_n[X])=\dim(\ker(\Phi_n))+\dim(\mathrm{Im}(\Phi_n)).$$

Donc $\mathrm{Im}(\Phi_n)$ est donc de dimension n et $\mathrm{Im}(\Phi_n)=\mathbb{Q}_{n-1}[X]$ pour $n\in\mathbb{N}^*$. Finalement $\mathrm{Im}(\Phi)=\mathbb{Q}[X]$.

(b) D'après ce qui précède, Φ est surjective donc l'existence est démontrée. Considérons deux polynômes Q_1 et Q_2 tels que :

$$\Phi(Q_1)=\Phi(Q_2)=X^p \text{ et } Q_1(0)=Q_2(0)=0.$$

On a alors $\Phi(Q_1-Q_2)=0$ et donc $(Q_1-Q_2)\in\ker(\Phi)=\mathbb{Q}_0[X]$, c'est-à-dire que le polynôme Q_1-Q_2 est constant. Or $(Q_1-Q_2)(0)=0$, donc cette constante est nulle, et ainsi $Q_1=Q_2$, et l'unicité est démontrée.

(c) On a l'identité $Q_p(X+1)-Q_p(X)=X^p$. Par dérivation, on obtient :

$$Q_p'(X+1)-Q_p'(X)=pX^{p-1}.$$

Soit $\Phi(Q_p')=pX^{p-1}$. Par définition, on a aussi : $\Phi(Q_{p-1})=X^{p-1}$ d'où : $\Phi(Q_p')=\Phi(pQ_{p-1})$. Comme précédemment, cela signifie que $Q_p'-pQ_{p-1}$ appartient à $\ker(\Phi)$, c'est-à-dire que c'est un polynôme constant, égal à $(Q_p'-pQ_{p-1})(0)=Q_p'(0)$.
D'où : $Q_p'-Q_p'(0)=pQ_{p-1}$.

(d) On a $Q_p'(X)-Q_p'(0)=pQ_{p-1}(X)$, donc par intégration :

$$Q_p(X)-XQ_p'(0)=\int_0^X pQ_{p-1}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il nous reste donc une constante à calculer. On a déjà utilisé $Q_p(0)=0$, de plus, pour p non nul, $Q_p(1)=0$. On obtient :

$$-Q_p'(0)=\int_0^1 pQ_{p-1}(t)\,\mathrm{d}t$$

et donc :

$$(*)\quad Q_p(X)=\int_0^X pQ_{p-1}(t)\,\mathrm{d}t-X\int_0^1 pQ_{p-1}(t)\,\mathrm{d}t,$$

ceci pour p non nul.
De manière évidente $Q_0(X)=X$. La formule $(*)$ permet de calculer de proche en proche les polynômes $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On trouve :

$$\begin{aligned}
Q_0(X) &= X,\\
Q_1(X) &= \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X,\\
Q_2(X) &= \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{2}X^2 + \frac{1}{6}X,\\
Q_3(X) &= \frac{1}{4}X^4 - \frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{4}X^2,\\
Q_4(X) &= \frac{1}{5}X^5 - \frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{30}X,\\
Q_5(X) &= \frac{1}{6}X^6 - \frac{1}{2}X^5 + \frac{5}{12}X^4 - \frac{1}{12}X^2.
\end{aligned}$$

(e) On a $Q_5'(0) = 0$ et donc $Q_5'(X) = 5Q_4(X)$, $Q_5'(X)$ est donc du signe de $Q_4(X)$ qu'on factorise :

$$\begin{aligned}
Q_4(X) &= \frac{1}{5}X^5 - \frac{1}{2}X^4 + \frac{1}{3}X^3 - \frac{1}{30}X\\
&= \frac{X(X-1)(2X-1)\left(3X^2-3X-1\right)}{30}
\end{aligned}$$

$\left(3X^2-3X-1\right)$ n'a pas de racine entre 0 et 1. Ce qui donne le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$Q_5'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$Q_5(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{128}$	$\nearrow$	0

Donc $M_5 = 0$ et $m_5 = -\dfrac{1}{128}$.

4. (a) On cherche une relation de récurrence :

$$\begin{aligned}
I_p(k) &= \int_0^1 \frac{pQ_{p-1}(t)}{(t+k)^{p+1}}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{Q_p'(t) - Q_p'(0)}{(t+k)^{p+1}}\mathrm{d}t\\
&= \int_0^1 \frac{Q_p'(t)}{(t+k)^{p+1}}\mathrm{d}t - Q_p'(0)\left[-\frac{1}{p}\frac{1}{(t+k)^p}\right]_0^1\\
&= \underbrace{\left[\frac{Q_p(t)}{(t+k)^{p+1}}\right]_0^1}_{=0} + (p+1)\int_0^1 \frac{Q_p(t)}{(t+k)^{p+2}}\mathrm{d}t - Q_p'(0)\left[-\frac{1}{p}\frac{1}{(t+k)^p}\right]_0^1\\
&= I_{p+1}(k) + \frac{Q_p'(0)}{p}\left(\frac{1}{(1+k)^p} - \frac{1}{k^p}\right)
\end{aligned}$$

Ou encore :

$$I_{p+1}(k) = I_p(k) - \frac{Q_p'(0)}{p}\left(\frac{1}{(1+k)^p} - \frac{1}{k^p}\right)$$

(b) D'une part, on a :

$$I_1(k) = \int_0^1 \frac{Q_0(t)}{(t+k)^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t}{(t+k)^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 \left[\frac{1}{t+k} - \frac{k}{(t+k)^2}\right]\mathrm{d}t = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1}.$$

D'autre part :

$$\begin{aligned}
I_6(k) &= I_1(k) - \frac{Q_5'(0)}{5}\left(\frac{1}{(1+k)^5} - \frac{1}{k^5}\right) - \frac{Q_4'(0)}{4}\left(\frac{1}{(1+k)^4} - \frac{1}{k^4}\right) \\
&\quad - \frac{Q_3'(0)}{3}\left(\frac{1}{(1+k)^3} - \frac{1}{k^3}\right) - \frac{Q_2'(0)}{2}\left(\frac{1}{(1+k)^2} - \frac{1}{k^2}\right) - \frac{Q_1'(0)}{1}\left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{k}\right) \\
&= I_1(k) - \frac{1}{120}\left(\frac{1}{(1+k)^4} - \frac{1}{k^4}\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{(1+k)^2} - \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{k}\right) \\
&= \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{120}\left(\frac{1}{(1+k)^4} - \frac{1}{k^4}\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{1}{(1+k)^2} - \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{k}\right)
\end{aligned}$$

D'après le résultat de la question **3e.**, on a $-\frac{1}{128} \leq Q_5(X) \leq 0$, donc $-\frac{1}{128}\int_0^1 \frac{6}{(t+k)^7}\mathrm{d}t \leq I_6(k) \leq 0$, et par conséquent :

$$-\frac{1}{128}\left(\frac{1}{k^6} - \frac{1}{(1+k)^6}\right) \leq I_6(k) \leq 0.$$

(c) D'après l'égalité de la question **2a.**, on a :

$$\begin{aligned}
u_n - \gamma &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} I_1(k-1) = \sum_{k=n}^{+\infty} I_1(k) \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} I_6(k) - \frac{1}{120}\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{(1+k)^4} - \frac{1}{k^4}\right) \\
&\quad + \frac{1}{12}\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{(1+k)^2} - \frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=n}^{+\infty}\left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{k}\right)
\end{aligned}$$

En effet, toutes ces séries convergent et pour les séries de différences, on a facilement leur somme en prenant la limite des sommes partielles. On a donc :

$$u_n - \gamma = \sum_{k=n}^{+\infty} I_6(k) + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{2n}$$

D'après la question précédente, on a $-\frac{1}{128}\left(\frac{1}{k^6} - \frac{1}{(1+k)^6}\right) \leq I_6(k) \leq 0$. Par télescopage, on a donc :

$$-\frac{1}{128n^6} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} I_6(k) \leq 0,$$

ce qui nous donne :

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \frac{1}{128n^6} \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4}$$

(d) L'inégalité précédente s'écrit aussi :

$$-\frac{1}{128n^6} \leq u_n - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2} - \frac{1}{120n^4} - \gamma \leq 0$$

Il suffit donc d'avoir $\frac{1}{128n^6} \leq 10^{-10}$, c'est à dire $n \geqslant \left(\frac{10^{10}}{128}\right)^{1/6}$, $n = 21$ convient. La valeur approchée cherchée est donc :

$$\begin{aligned}
\gamma &\simeq u_{21} - \frac{1}{120 \times 21^4} + \frac{1}{12 \times 21^2} - \frac{1}{2 \times 21} \\
&\simeq 0,5772156648
\end{aligned}$$

Deuxième partie : Utilisation de γ pour calculer certains intégrales généralisées

-A-

1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\mathrm{d}t$ est généralisée en 1 mais on verra que la fonction sous signe intégrale a une limite finie en 1 et donc l'intégrale converge. En effet $\displaystyle\lim_{t\to 1}\frac{1-t^n}{1-t} = \lim_{t\to 1}\sum_{i=0}^{n-1} t^i = n$, on remplace donc $\displaystyle\frac{1-t^n}{1-t}$ par $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} t^i$, et on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\mathrm{d}t &= \sum_{i=0}^{n-1}\int_0^1 t^i \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{i+1}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}.\end{aligned}$$

Utilisons le changement de variable $t = 1 - \dfrac{y}{n}$ dans l'égalité précédente, on obtient :

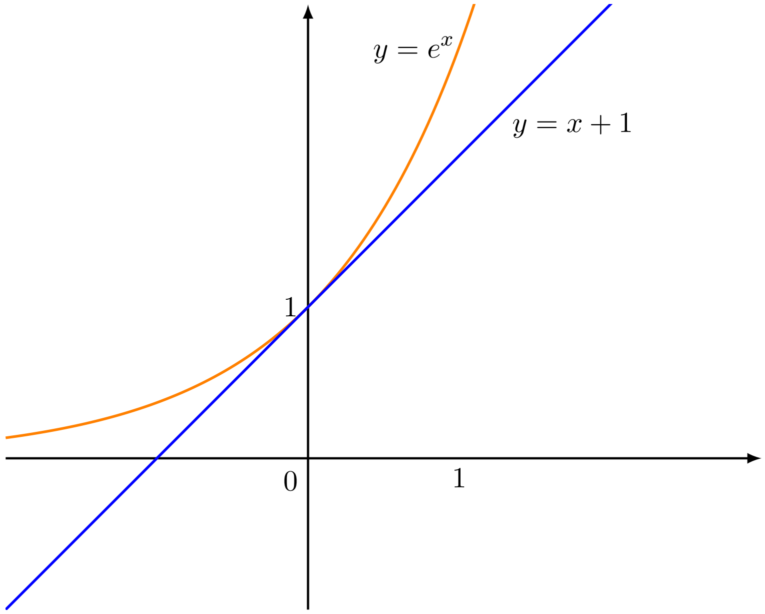
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} &= \int_n^0 \frac{1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n}{1-\left(1-\frac{y}{n}\right)}\mathrm{d}\left(1-\frac{y}{n}\right)\\ &= \int_0^n \left[1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n\right]\frac{\mathrm{d}y}{y}.\end{aligned}$$

2. On a $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \ln(n)$, ce qui donne

$$\begin{aligned}u_n &= \int_0^n \left[1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n\right]\frac{\mathrm{d}y}{y} - \ln(n)\\ &= \int_0^1 \left[1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n\right]\frac{\mathrm{d}y}{y} + \int_1^n \left[1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n\right]\frac{\mathrm{d}y}{y} - \ln(n)\\ &= \int_0^1 \left[1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n\right]\frac{\mathrm{d}y}{y} - \int_1^n \left(1-\frac{y}{n}\right)^n \mathrm{d}y\, y + \int_1^n \frac{\mathrm{d}y}{y} - \ln(n)\\ &= \int_0^1 \left[1-\left(1-\frac{y}{n}\right)^n\right]\frac{\mathrm{d}y}{y} - \int_1^n \left(1-\frac{y}{n}\right)^n \mathrm{d}y\, y.\end{aligned}$$

3. (a) La courbe représentative de la fonction exponentielle est convexe, donc elle est au dessus de sa tangente au point $(0,1)$ d'équation $y = 1 + x$. Ceci montre que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leq e^x$$



(b) Il suffit d'appliquer l'inégalité précédente, respectivement, avec $x = \frac{t}{n}$ et $x = -\frac{t}{n}$.

(c) Considérons la fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(u) = (1-u)^n - 1 + nu$, on a $f'(u) = n\left(1-(1-u)^{n-1}\right) \geqslant 0$ pour $u \in [0,1]$. Comme $f(0) = 0$:

$$\forall u \in [0,1] \quad (1-u)^n - 1 + nu \geqslant 0$$

En remplaçant u par $\frac{x^2}{n^2}$ qui est dans $[0,1]$ pour $t \in [0,n]$, on obtient l'inégalité demandée.

(d) L'inégalité de gauche n'est autre que la deuxième inégalité de la question **3.b**. On réécrit l'inégalité de la question **3.c** :

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1 - \frac{x^2}{n}$$

Utilisons maintenant la première inégalité de la question **3.b**, on a :

$$e^y \left(1-\frac{y}{n}\right)^n \geq e^y \left(1-\frac{y}{n}\right)^n \geq 1 - \frac{y^2}{n}.$$

D'où $\left(1-\frac{y}{n}\right)^n \geq e^{-y} - \frac{y^2}{n}e^{-y}$ ou encore :

$$\frac{y^2}{n}e^{-y} \geq e^{-y} - \left(1-\frac{y}{n}\right)^n.$$

Ce qui est la deuxième inégalité.

4. Le problème de convergence de l'intégrale est en $+\infty$. La fonction est positive et pour $x \geqslant 1$, on a $\frac{e^{-x}}{x} \leq e^{-x}$ dont l'intégrale converge par limite finie d'une primitive. $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$ converge.
On a

$$u_n = \int_0^1 \left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right] \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^n \left[\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right] \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

et

$$e^{-x} - \frac{x^2}{n}e^{-x} \leq \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x}.$$

Ce qui donne

$$\frac{1-e^{-x}}{x} \leq \frac{1}{x}\left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right] \leq \frac{1}{x}\left[1-e^{-x}-\frac{x^2e^{-x}}{n}\right].$$

D'où :

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x - \int_1^n \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x \leq u_n \leq \int_0^1 \frac{1-e^{-x}+\frac{x^2}{n}e^{-x}}{x}\mathrm{d}x - \int_1^n \frac{e^{-x}-\frac{x^2}{n}e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$$
$$\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x - \int_1^n \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x \leq u_n \leq \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x - \int_1^n \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\int_0^n xe^{-x}\mathrm{d}x$$

Or l'intégrale $\int_0^{+\infty} xe^{-x}\mathrm{d}x$ converge, donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^n xe^{-x}\mathrm{d}x = 0$. On passe à la limite dans les inégalités précédentes. Ces limites existent bien et par application du théorème des gendarmes :

$$\gamma = \int_0^1 \left(1-e^{-y}\right)\frac{\mathrm{d}y}{y} - \int_1^{+\infty} e^{-y}\frac{\mathrm{d}y}{y}.$$

-B-

1. On va faire un développement limité de $g : x \mapsto \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x}$ à partir d'un développement limité à l'ordre 2 de e^{-x} au voisinage de 0, on a :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{1-\left(1-x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{2}+o(x)} - 1\right) \\ &= \frac{1}{2} + o(1) \end{aligned}$$

Ceci prouve que g est prolongeable par continuité en 0 par $\frac{1}{2}$. D'autre part, $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$, ce qui prouve que Φ est bornée au voisinage de 0 et de $+\infty$, et comme elle est continue sur $]0,+\infty[$, elle y est bornée. Ainsi il existe $M > 0$ tel que, $\forall x \in]0,+\infty[$, $\left|e^{-x}g(x)\right| \leq Me^{-x}$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x}\mathrm{d}x$ converge. Ceci prouve que $\int_0^{+\infty} e^{-x}g(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument donc converge.

2. Posons $\varphi_n(x) = \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}$ pour $x \in]0,+\infty[$. φ est continue sur $]0,+\infty[$, se prolonge par continuité en 0 puisque,

$$\frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x} = \frac{1-x-1+nx+o(x)}{x} = n-1+o(1)$$

De plus $\varphi(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\mathrm{d}x$ converge.

3. L'intégrale $I_n(a)$ converge puisque $0 \leq \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x} \leq \frac{e^{-x}}{a}$. De plus, on peut diviser cette intégrale en deux intégrales convergentes par le même type de majoration :

$$I_n(a) = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{x}\mathrm{d}x$$

On fait le changement de variable $nx = u$ dans la deuxième intégrale par ailleurs convergente. On a donc :

$$\begin{aligned}
I_n(a) &= \int_a^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x - \int_{na}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u \\
&= \int_a^{na} \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_a^{na} \frac{1-(1-e^{-x})}{x}\mathrm{d}x \\
&= \int_a^{na} \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_a^{na} \frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x \\
&= \ln(n) - \int_a^{na} \frac{1-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x \ \ (*) \\
&= \int_\alpha^{n\alpha} \frac{e^{-x}}{x}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

De plus

$$\lim_{a\to 0} I_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\mathrm{d}x$$

par définition d'une intégrale convergente.

4. Soit F une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{1-e^{-x}}{x}$, F a bien une limite finie en 0 puisque son intégrale converge. D'après l'égalité $(*)$ on a :

$$I_n(a) = \ln(n) - \int_\alpha^{n\alpha} f(x)\mathrm{d}x = \ln(n) - F(na) + F(a)$$

On passe à la limite quand a tend vers 0 et :

$$\lim_{a\to 0} I_n(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\mathrm{d}x = \ln(n)$$

5.

$$\begin{aligned}
v_n &= S_{n-1} - \ln(n) \\
&= S_{n-1} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{x}\mathrm{d}x \\
&= S_{n-1} - \int_0^{+\infty} \left(e^{-x}-e^{-nx}\right)\left[\frac{1}{1-e^{-x}} - g(x)\right]\mathrm{d}x \\
&= S_{n-1} - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{1-e^{-x}}\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \left(e^{-x}-e^{-nx}\right) g(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Utilisons le changement de variables $u = e^{-x}$ dans la première intégrale qui est bien convergente.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}-e^{-nx}}{1-e^{-x}}\mathrm{d}x = -\int_1^0 \frac{1-u^{n-1}}{1-u}\mathrm{d}u = S_{n-1}$$

en utilisant le II.A). Il ne reste qu'à conclure :

$$v_n = \int_0^{+\infty} \left(e^{-x}-e^{-nx}\right) g(x)\,\mathrm{d}x$$

6. On casse encore la dernière intégrale obtenue en deux intégrales convergentes.

$$v_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} e^{-nx} g(x)\,\mathrm{d}x$$

Mais $\left|e^{-nx}g\left(x\right)\right| \leq Me^{-nx}$, et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-nx}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}$, d'où $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty} e^{-nx}g(x)\right| \leq \frac{M}{n}$.

Ceci prouve que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx}g\left(x\right)\mathrm{d}x = 0$ et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = \gamma$, on a aussi :

$$\gamma = \int_0^{+\infty} e^{-x}g\left(x\right)\mathrm{d}x$$

• • • • • • • • • •